Санкт-Петребургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А.Бонч-Бруевича

Факультет Экономики и Управления

Кафедра Управления и Моделирования в социально-экономических системах

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И РИСК-АНАЛИЗ

Основы теории нечетких множеств

Неопределенность – это неустранимое свойство рыночной среды, связанное с тем, что на рынке одновременно действует множество факторов различной природы и направленности, корректная совокупная оценка которых практически невозможна.

Рыночная неопределенность ***не обладает статистической природой,*** т.к. окружающая фирму бизнес-среда постоянно меняется под воздействием различных факторов, включая человеческий фактор. ***«Нельзя дважды войти в одну и ту же реку».***

Вероятность и возможность

При анализе процессов, подчиняющихся статистическим законам, можно использовать **теорию вероятности**.

Для бизнес процессов и систем с интеллектом, т.е там где люди принимают решения, не существует надежной статистики. Невозможно обеспечить однородность и одинаковость условий эксперимента для расчета вероятности. Классическая теория вероятности здесь не работает.

При анализе таких систем необходимо использовать **теорию возможностей** , в основе которой лежит теория нечетких множеств.

Квазистатистика
(определение по А.Недосекину)

– это выборка наблюдений из их генеральной совокупности, которая считается недостаточной для идентификации вероятностного закона распределения с точно определенными параметрами,

но признается достаточной для того, чтобы с той или иной субъективной степенью достоверности обосновать закономерность наблюдений в некоторой форме,

причем параметры этой закономерности будут заданы по специальным правилам, чтобы удовлетворить требуемой достоверности идентификации закономерности наблюдений.

Нечеткие множества (НМ)
(этапы развития теории)

В 1965 году Лотфи.А.Заде (Lotfi A. Zadeh), профессор информатики университета в Беркли (Калифорния), ввел в науку понятие нечетких множеств (fuzzy sets или fuzzy logic), давшее название одноименной теории.

С 1975 года начался бурный рост прикладных работ в различных отраслях.

Интеграция с классической теорией вероятности привела к появлению теории возможности (эвентология).

Четкие и нечеткие множества

- Для ЧМ элемент либо принадлежит этому множеству, либо нет – третьего не дано.
- Для НМ элемент может не вполне принадлежать этому множеству.
- Степень принадлежности определяется соответствующей функцией принадлежности $0 \le \mu(x) \le 1$

В.И.Котов 6

Основные определения

- ***Носитель U*** – это универсальное множество, к которому относятся все результаты наблюдений ***x*** в рамках оцениваемой квазистатистики.
- ***Нечеткое множество*** – это множество значений носителя, такое, что каждому значению носителя $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$ сопоставлена степень принадлежности $0 \le \mu A(x) \le 1$ этого значения множеству ***A***.

Основные определения
(продолжение)

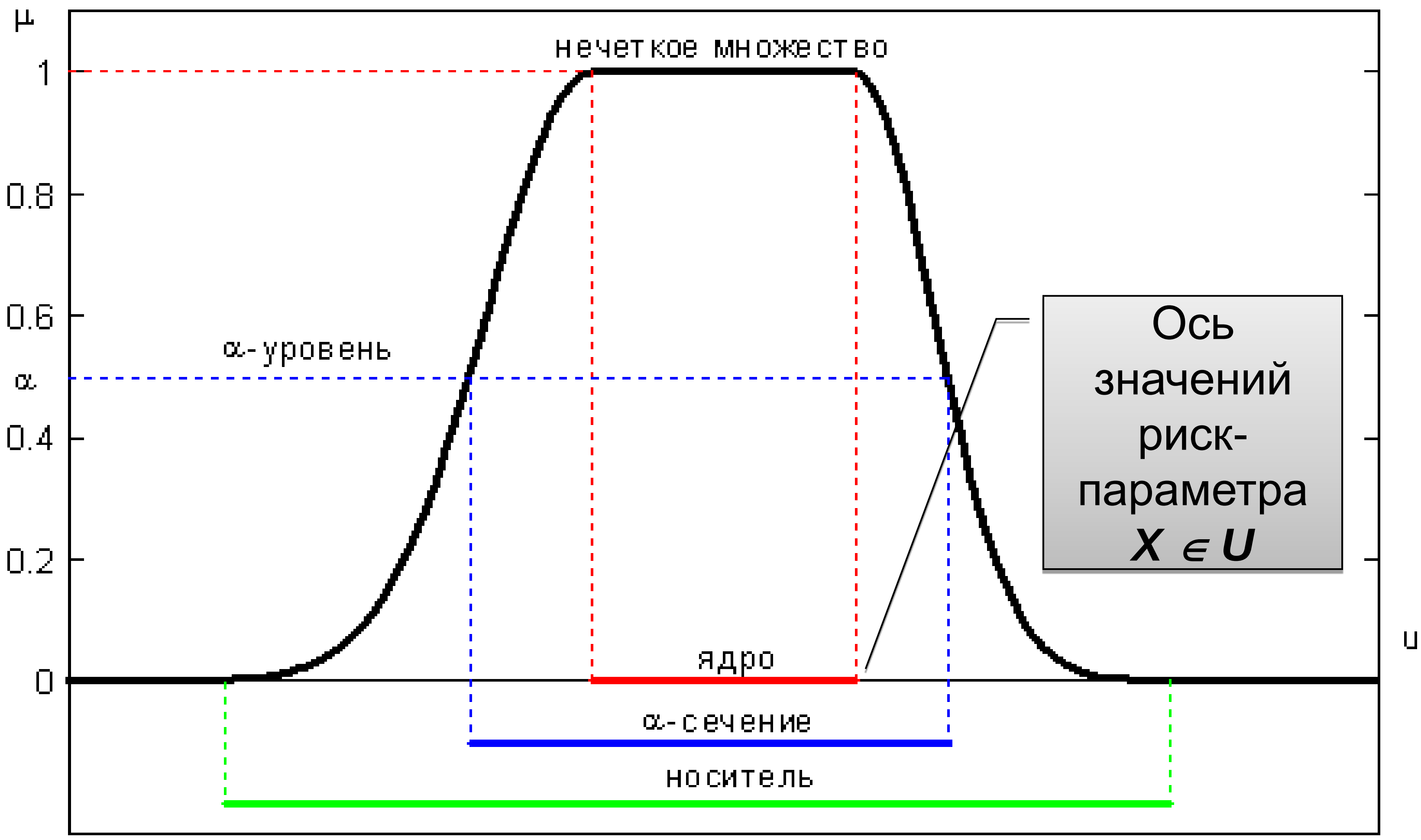
- ***Функция принадлежности*** $\boldsymbol{\mu A(x)}$ – это функция, областью определения которой является носитель ***U, x*** $\in$ ***U***, а областью значений – единичный интервал [0,1].

  Чем больше $\mu A(x)$, тем выше оценивается степень принадлежности элемента носителя ***x*** нечеткому множеству ***A***.

Свойства нечетких множеств

- **Высотой** НМ является верхняя граница его функции принадлежности
- НМ называется **нормальным**, если его высота равна единице
- **Ядром** НМ является четкое подмножество носителя, элементы которого имеют степени принадлежности равные единице
- **Сечением** или **α-уровнем** НМ называется четкое подмножество носителя, элементы которого имеют степени принадлежности больше или равные **α**

Пример функции принадлежности



Нечеткие числа и операции над ними

Нечеткое число – это нечеткое подмножество множества действительных чисел (носителя), имеющее ***нормальную*** и ***выпуклую*** функцию принадлежности, то есть такую, что:

а) существует значение носителя, в котором функция принадлежности равна единице (**условие нормальности**),

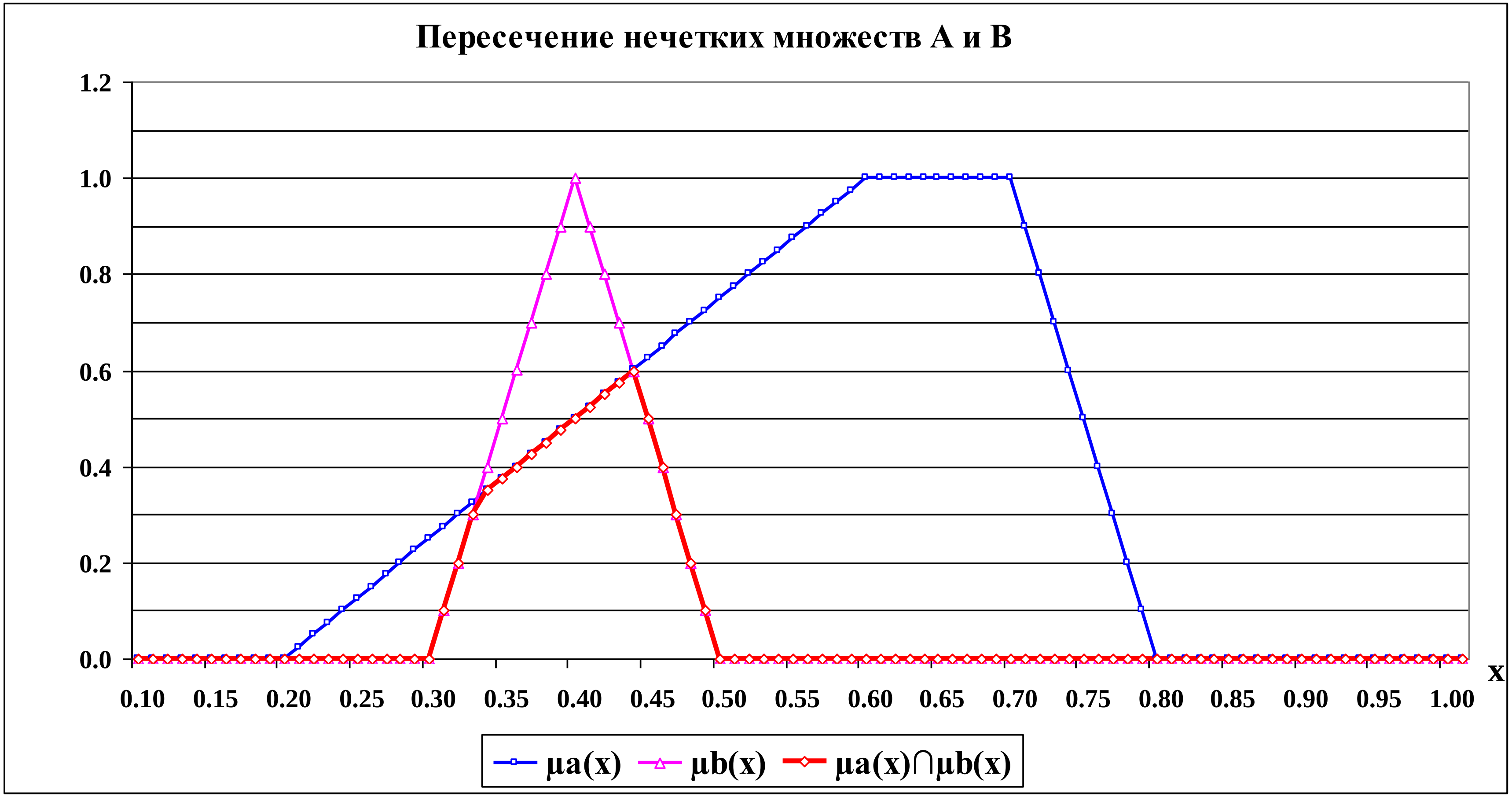
б) при отступлении от своего максимума влево или вправо функция принадлежности убывает (**условие выпуклости**).

Операции с нечеткими множествами

- **пересечение -** если $\boldsymbol{C = A \cap B}$, то $\mu C(x) = \min(\mu A(x), \mu B(x))$;
- **объединение -** если $\boldsymbol{C = A \cup B}$, то $\mu C(x) = \max(\mu A(x), \mu B(x))$;
- **отрицание -** если $\boldsymbol{C = \neg A}$, то $\mu C(x) = 1-\mu A(x)$;
- **отношение включения** – если ***A*** содержится в ***B***, т.е. $\boldsymbol{A \subseteq B}$, то , $\mu A(x) \le \mu B(x)$.
- **равенство** - если $\boldsymbol{A = B}$, то $\mu A(x) = \mu B(x)$.

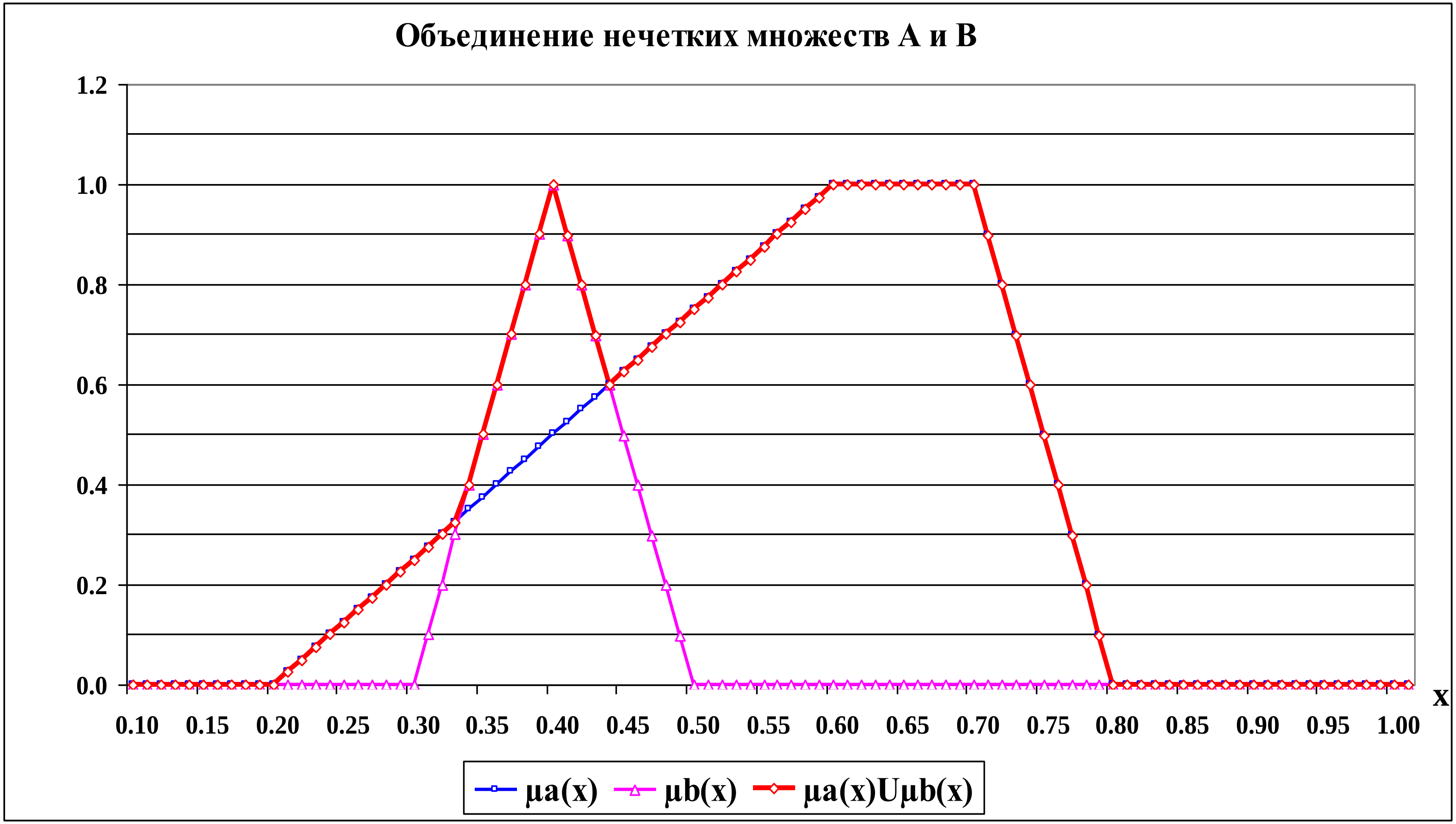
Пересечение A и B

$$\mu C(x) = min(\mu A(x), \mu B(x))$$



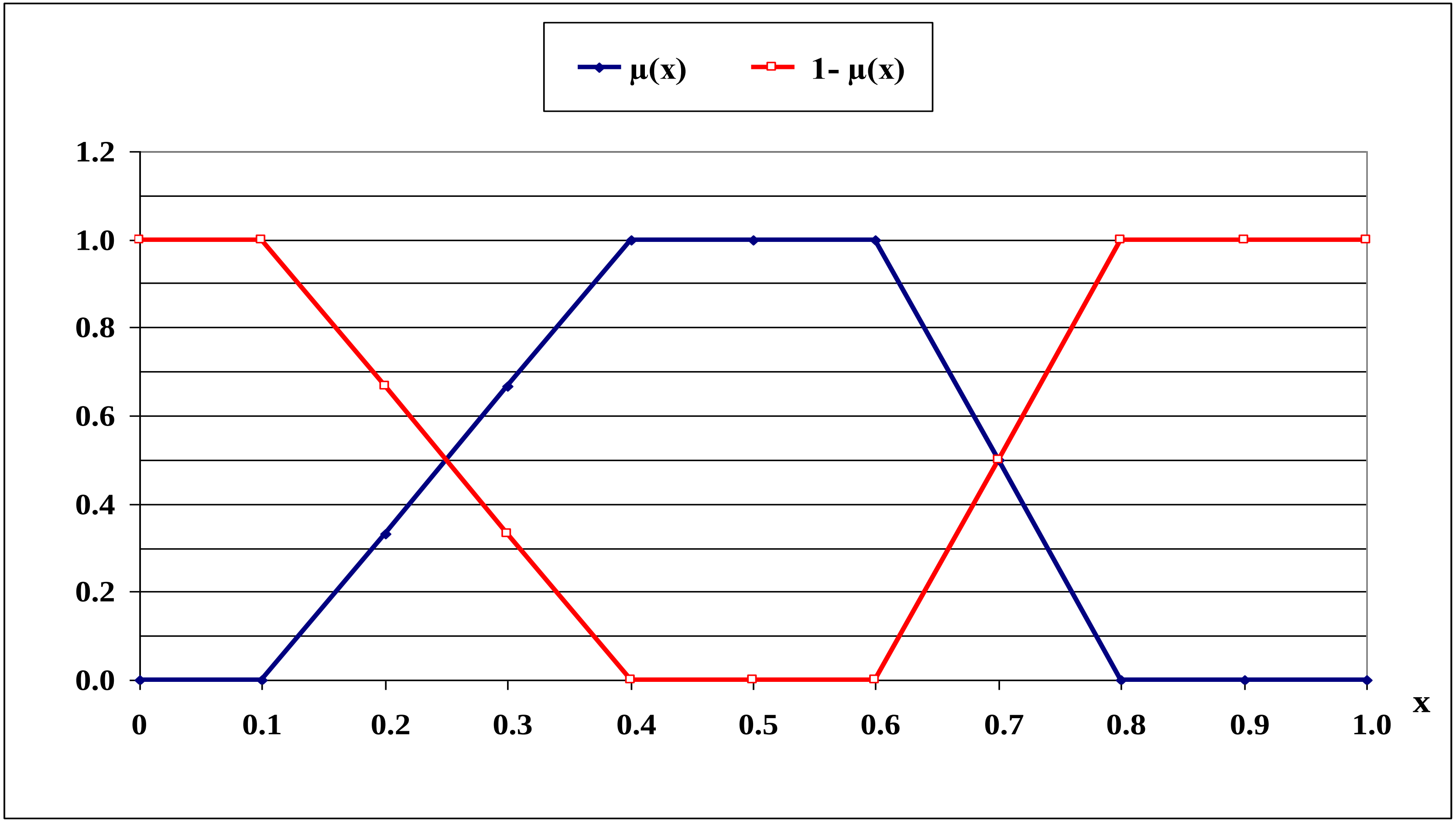
Объединение A и B

$$\mu C(x) = max(\mu A(x), \mu B(x))$$



Отрицание (не А)

$$\mu C(x) = 1\text{-}\mu A(x)$$



Лингвистическая переменная

Л.Заде определяет лингвистическую переменную как:

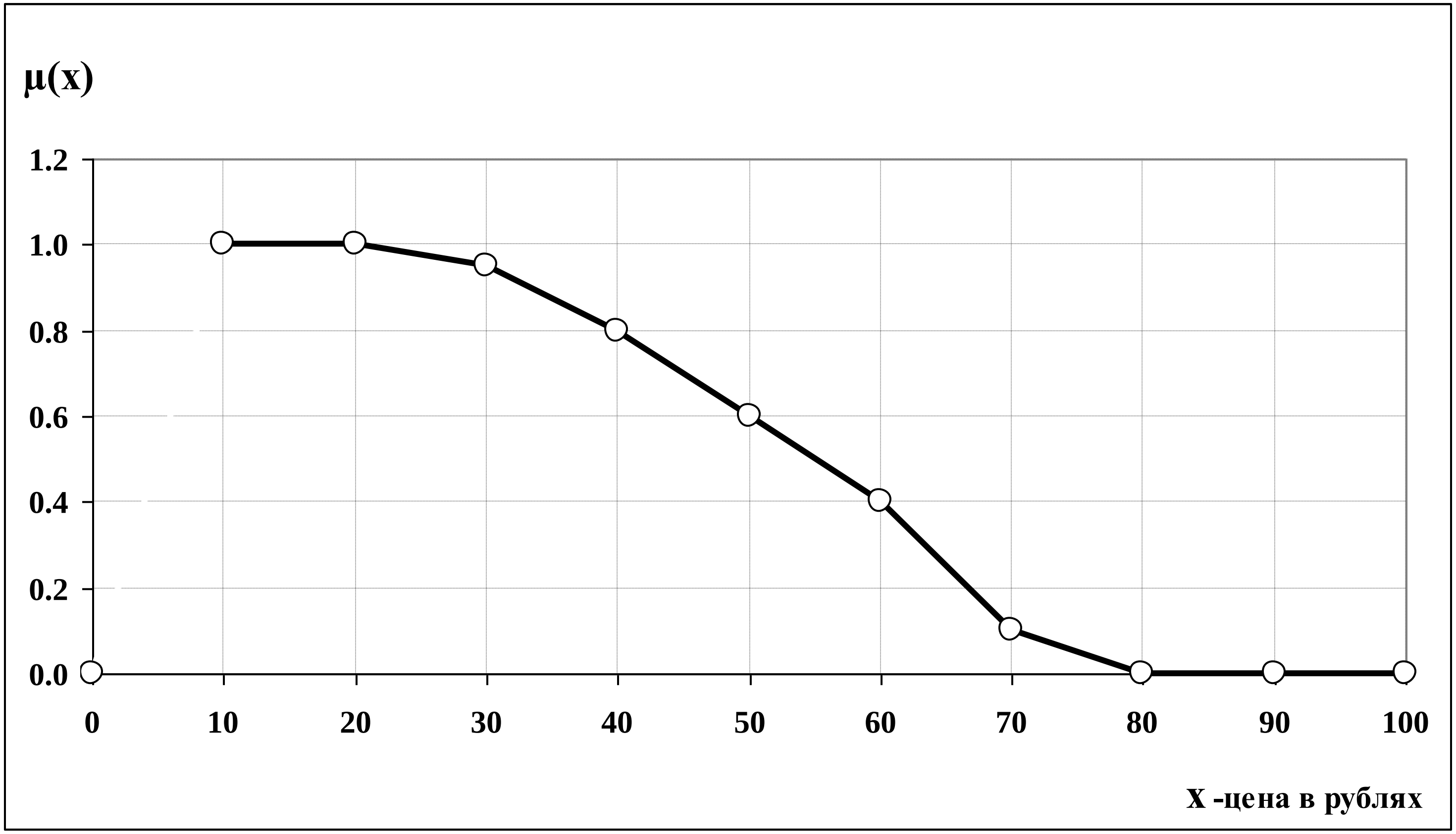
Ω **= [*ω*,*T*(*ω*),*U*,*G*,*M*],** где:

- ω - название переменной,
- *T* – терм-множество значений, т.е. совокупность ее лингвистических значений,
- *U* – носитель,
- *G* – синтаксическое правило, порождающее термы множества *T*,
- *M* – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению ω ставит в соответствие его смысл $M(\omega)$, причем $M(\omega)$ обозначает нечеткое подмножество носителя *U*.

Пример лингвистической переменной

1. Зададим лингвистическую переменную Ω *с названием* ω **= «**Доступные по цене сигареты для небогатых»**.**
2. Определим синтаксическое правило *G* как определение «доступные», налагаемое на переменную Ω.
3. Полное терм-множество значений *T* = { *T1* = Доступные сигареты для небогатых, *T2* = Недоступные сигареты для небогатых **}.**
4. Носителем *U* выступает отрезок [10, 100], измеряемый в рублях за одну пачку.
5. Две функции принадлежности: $\mu T1(x)$ для *T1,* и $\mu T2(x) = - \mu T1(x)$ для *T2, которые отвечают нечетким подмножествам: M1 и M2.*

Пример нечеткого множества: «Доступные по цене сигареты для небогатых»



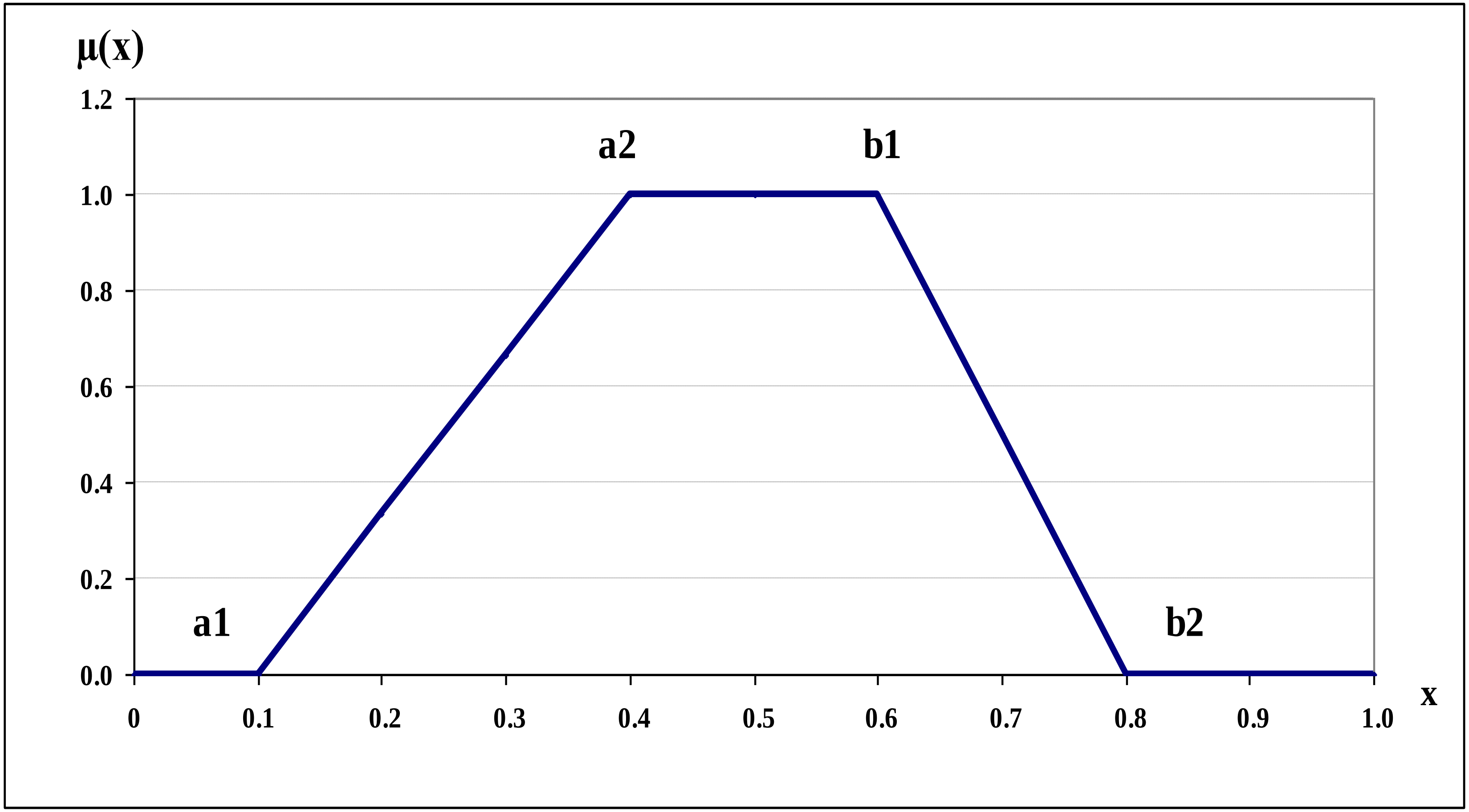
Нечеткие числа и операции над ними

Нечеткое число – это нечеткое подмножество множества действительных чисел, имеющее *нормальную* и *выпуклую* функцию принадлежности, то есть такую, что:

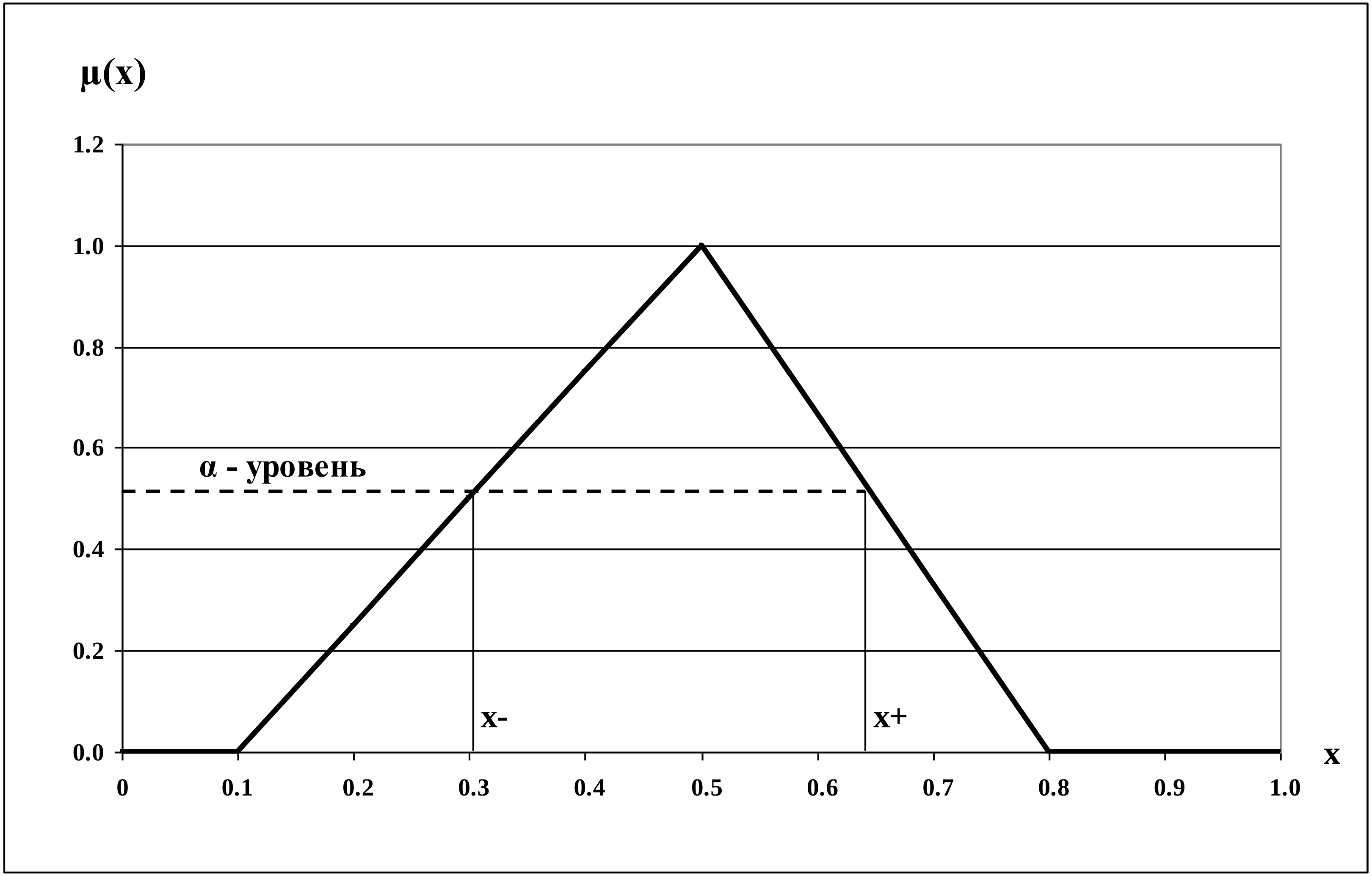
а) существует значение носителя, в котором функция принадлежности равна единице (условие нормальности),

б) при отступлении от своего максимума влево или вправо функция принадлежности убывает (условие выпуклости).

Трапециевидное число



Треугольное число



Мягкие вычисления
(нечеткая арифметика)

Для любого α-уровня принадлежности:

- операция "сложения":
  [***a1, a2***] (+) [***b1, b2***] = [***a1 + b1, a2 + b2***],
- операция "вычитания":
  [***a1, a2***] (-) [***b1, b2***] = [***a1 - b2, a2 - b1***],
- операция "умножения":
  [***a1, a2***] (×) [***b1, b2***] = [***a1 × b1, a2 × b2***],
- операция "деления":
  [***a1, a2***] (/) [***b1, b2***] = [***a1 / b2, a2 / b1***],
- операция "возведения в степень":
  [***a1, a2***] (^) ***i*** = [$a1^{i}$, $a2^{i}$].

Свойства треугольных и трапециевидных чисел

- действительное число есть частный случай треугольного нечеткого числа;
- сумма треугольных чисел есть треугольное число;
- треугольное (трапециевидное) число, умноженное на действительное число, есть треугольное (трапециевидное) число;
- сумма трапециевидных чисел есть трапециевидное число;
- сумма треугольного и трапециевидного чисел есть трапециевидное число.

Нечеткие функции

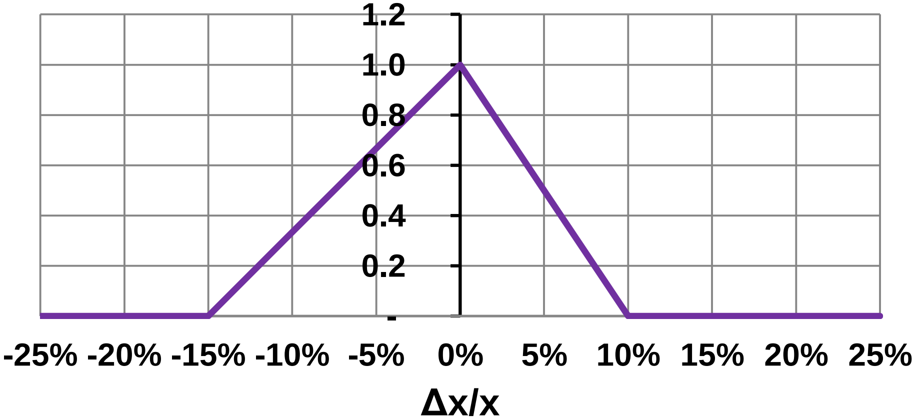
- ***Поле нечетких чисел*** – это несчетное множество нечетких чисел.
- ***Нечеткая функция*** – это взаимно однозначное соответствие двух полей нечетких чисел.
- Вид нечеткой функции определяется видом чисел области ее определения (треугольные, трапециевидные и др.)

Свойства нечетких функций

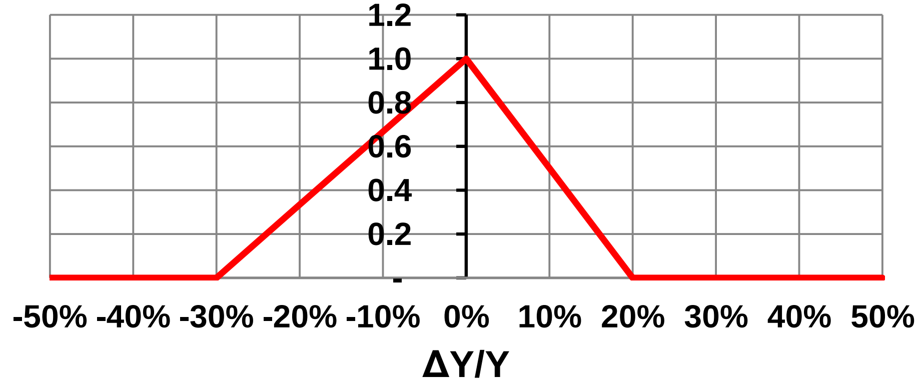
- **сложение:** сумма (разность) треугольных функций есть треугольная функция;
- **умножение на число** переводит треугольную функцию в треугольную функцию;
- **дифференцирование (интегрирование)** треугольной нечеткой функции проводится по правилам вещественного дифференцирования (интегрирования)

Нечеткие аргумент и функция треугольного вида

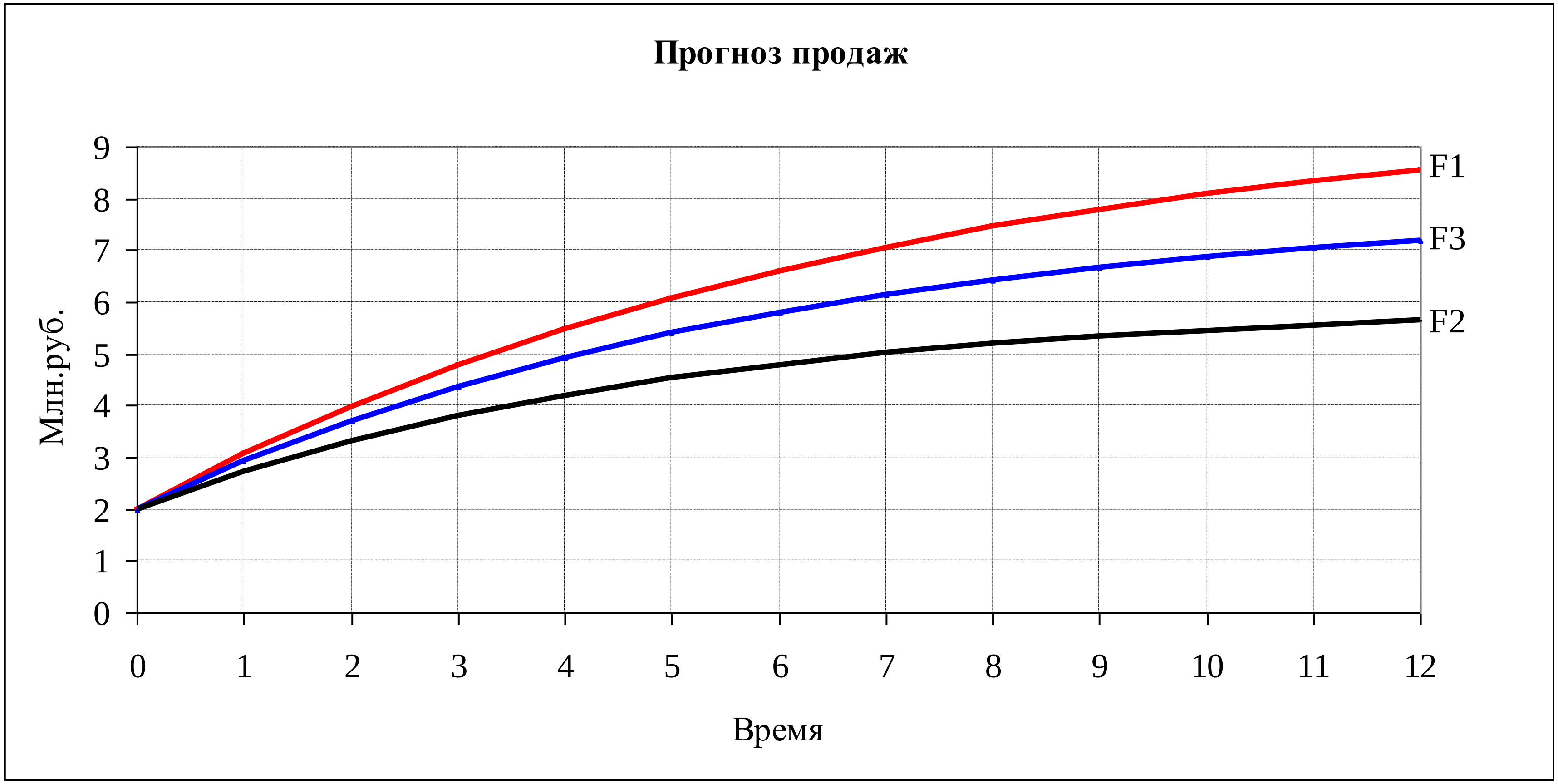
Функция принадлежности отклонения риск-параметра
μ(Δx/x)



Функция принадлежности отклонения целевой функции
μ(ΔY/Y)



Функция: «Прогноз продаж в момент t» есть треугольное число [$F_2(t)$, $F_3(t)$, $F_1(t)$]



α-уровневый принцип обобщения

Пусть:

$$Y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

- функция от n независимых переменных с аргументами $\boldsymbol{x_i}$ заданными нечеткими числами:

$$\tilde{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (x^-_{i,\alpha}, x^+_{i,\alpha}), \quad i = \overline{1,n}$$

где $\boldsymbol{x}$**± -** верхняя и нижняя абсцисса *α*–уровня.

α-уровневый принцип обобщения
(продолжение)

Значением нечеткой функции:

$$\tilde{Y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_n)$$

называется нечеткое число:

$$\tilde{Y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (Y_\alpha^-, Y_\alpha^+)$$

α-уровневый принцип обобщения
(продолжение)

Нижняя (-) и верхняя (+) границы α–уровня нечеткой функции будут, соответственно:

$$Y_\alpha^- = \inf_{x_{i,\alpha} \in [x_{i,\alpha}^-, x_{i,\alpha}^+], i=\overline{1,n}} \{ f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \ldots x_{n,\alpha}) \}$$

$$Y_\alpha^+ = \sup_{x_{i,\alpha} \in [x_{i,\alpha}^-, x_{i,\alpha}^+], i=\overline{1,n}} \{ f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \ldots x_{n,\alpha}) \}$$

α-уровневый принцип обобщения
(окончание)

Применение *α*-уровневого принципа обобщения сводится к решению для каждого α–уровня следующей задачи оптимизации:

Найти минимальное и максимальное значения функции:

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

при условии, что аргументы могут принимать значения из соответствующих α–уровневых множеств.

Оценка одновременного влияния совокупности рисков

Полное относительное отклонение целевой функции при воздействии ***N*** рисков:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sum_{i=1}^{N} S_{x_i}^{Y} \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Для каждого из ***N*** нечетких относительных отклонений риск-параметров $\boldsymbol{x_i}$ определим максимальные границы интервалов достоверности (треугольные числа):

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \in [a_i^{-}, a_i^{+}], \forall i$$

Нечеткое относительное отклонение целевой функции

$$\frac{\Delta Y}{Y} \in [b^-, b^+], \forall i$$

где границы интервалов достоверности:

$$b^- = \sum_i \min(S_{x_i}^Y a_i^-, S_{x_i}^Y a_i^+)$$

$$b^+ = \sum_i \max(S_{x_i}^Y a_i^-, S_{x_i}^Y a_i^+)$$

Оценка вероятности одновременного воздействия *k* рисковых событий из *N*

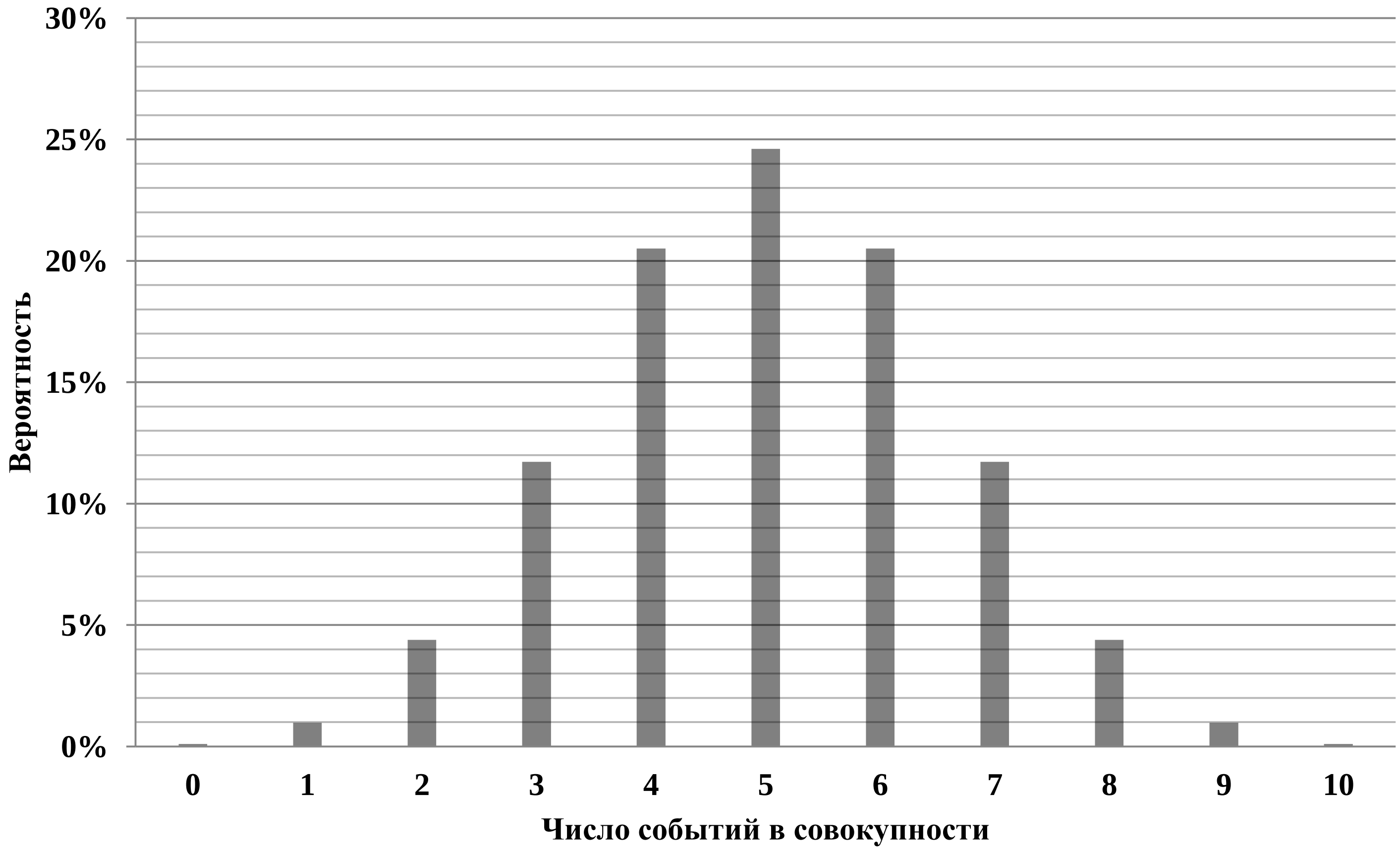
Число комбинаций из ***N*** событий по ***k***:

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Вероятность появления случайной совокупности, состоящей из ***k*** событий:

$$P_k = \frac{C_N^k}{\sum_{i=0}^{N} C_N^i}$$

Вероятности одновременного действия различных совокупностей из 10 рисковых событий

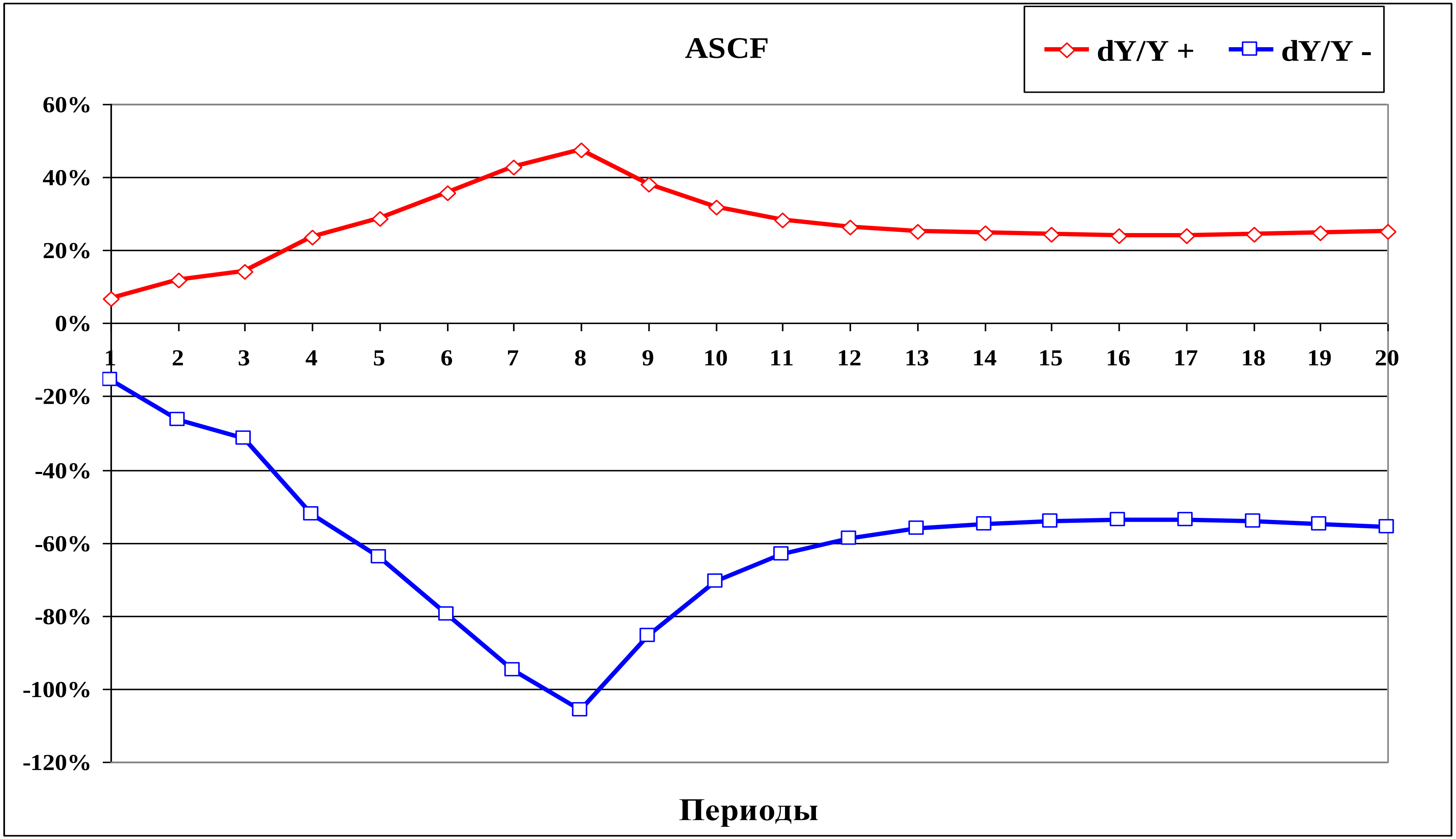


Границы интервалов риск-параметров

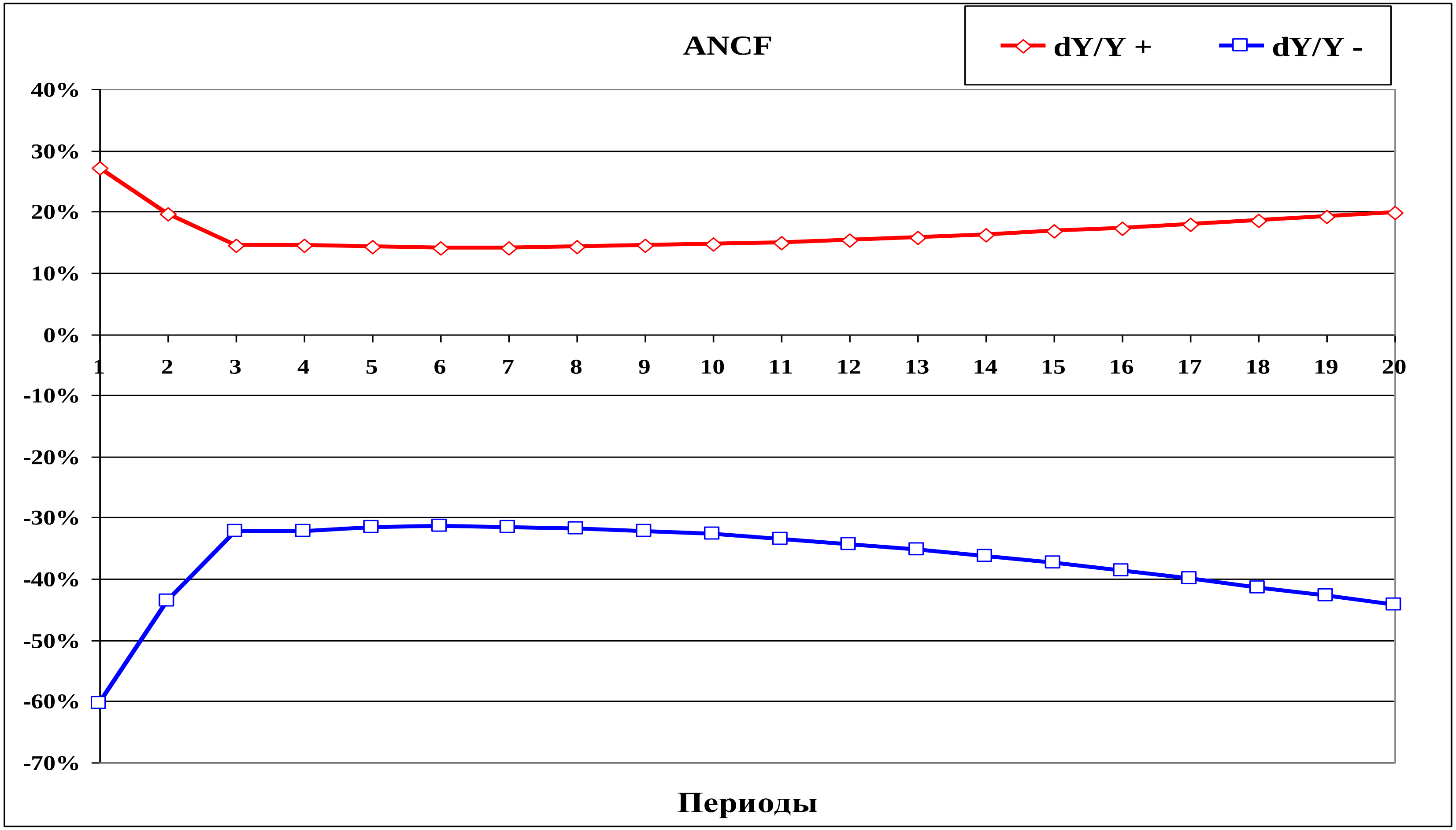
Для каждого из ***N*** нечетких относительных отклонений риск-параметров $\boldsymbol{x_i}$ определим максимальные границы интервалов достоверности (треугольные числа):

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \in [a_i^-, a_i^+], \forall i$$

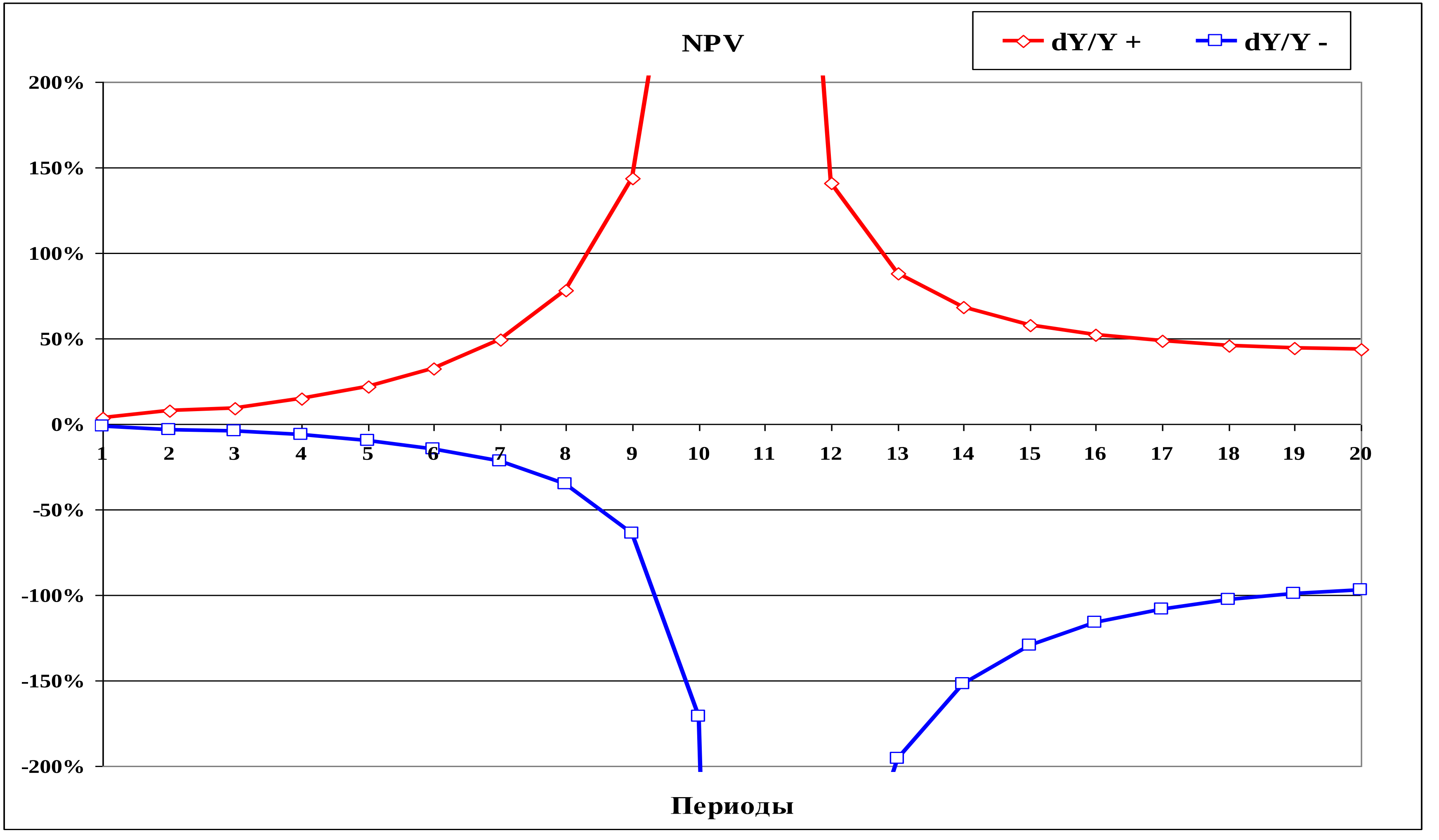
Границы относительных отклонений накопленного сальдо финансовых потоков



Границы относительных отклонений накопленного чистого финансового потока



Границы относительных отклонений чистой текущей стоимости



Оценка рисковой составляющей в ставке дисконта

Ставка дисконта: $1+ d = (1+ a)(1+ i)(1+ R)$

1. Вначале проводим расчет $\boldsymbol{NPV_{бр}(T)}$ при безрисковой ставке дисконта: $1+ d_0 = (1+ a)(1+ i)$.
2. Затем для выбранных возможных отклонений риск-параметров с помощью нечеткой модели находим относительное уменьшение $\boldsymbol{\delta NPV_{бр}(T)}$ при воздействии совокупности рисков.
3. Вычисляем в конце горизонта планирования предельное значение

   $$NPV_{пред}(T) = NPV_{бр}(T) / [1+ \delta NPV_{бр}(T)]$$

Оценка рисковой составляющей в ставке дисконта (продолжение)

- Возвращаемся к исходной модели и с помощью опции «Подбор параметра» в EXCEL находим то значение ставки дисконта ***d***, при которой ***NPV(T)*** = $\boldsymbol{NPV_{пред}(T)}$. Эта ставка ***d*** будет искомой ставкой дисконта с учетом всех заложенных рисков.
- Теперь рисковая составляющая 1+R ставки дисконта может быть легко найдена, а именно:

$$1+R = (1+d) / (1+d_0)$$

Это максимально возможная рисковая поправка, т.к. при ее расчете мы полагали, что все рисковые событии непременно произойдут, и будут действовать в неблагоприятном для проекта направлении, т.е. приведут к снижению ***NPV***.

Благодарю за внимание!

Есть ли вопросы?